

Cijferen

Niet eerder dan dat het hoofdrekenen tot 100 en de tafels tot 10 x min of meer zitten, wordt met het cijferen begonnen. Dit moment ligt meestal niet voor het einde van de derde klas. Het cijferen wordt aanvankelijk vooral in dienst gesteld van het automatiseren van de tafels. Dat wil zeggen dat opgaven zo gekozen worden dat de kinderen puur gebruik kunnen maken van beschikbare kennis. Zo wordt er bijvoorbeeld nog niet vermenigvuldigd of gedeeld door 13, want dat is geen tafelgetal.

De praktijk in de vierde klas en de hogere klassen

Het werken met de tafels is aan het eind van de derde klas helemaal ingebed in het hoofdrekenen tot 100 en verder (bijvoorbeeld de tafel van 600 en de 'lastigere' tafel van 60). Het ritmisch oefenen heeft zijn werk in de ontwikkeling van het 'middengebied' gedaan en ondersteunt nu het wakker en bewust werken met produkten en vermenigvuldigingsstructuren.

Heel wat vormen die in hogere klassen gedaan worden, zijn uitwerkingen van de hiervoor besproken principes. We laten die uitbreidingen en variaties aan de vindingrijkheid van de leraar over.

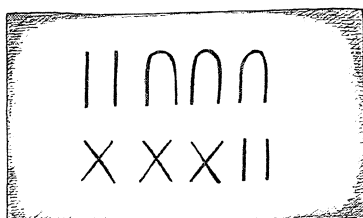
3.3 Cijferen

Cijferen: wat leert de geschiedenis?

Het is met cijferen eigenlijk vreemd gesteld. Wie het optellen en aftrekken in kolommen en vermenigvuldigen 'onder elkaar' alsook de staartdeling op school gehad heeft, meent vaak dat hij standaardprocedures heeft geleerd, die van alle tijden zijn en nimmer aan verandering onderhevig waren. Leraren die er zo over denken trekken hieruit vaak de didactische consequentie dat ook het cijferonderwijs volgens aloude principes dient te geschieden: stap voor stap, recht toe recht aan in de richting van de meest efficiënte rekenwijze. Wie evenwel de geschiedenis van de wiskunde bekijkt of zijn oor te luisteren legt bij kinderen en volwassenen die hun rekenwerk durven tonen, weet wel beter.

Eerst een paar voorbeelden uit de geschiedenis van de wiskunde.

Gaan we ver terug, tot in de tijd van de oude Egyptenaren, dan treffen we rekenwijzen die geen enkele overeenkomst vertonen met ons cijferen. Dat is niet zo moeilijk te begrijpen, want de schrijfwijze van de getallen was niet positioneel (zoals in ons tientallige stelsel, waarbij elk cijfer een plaatswaarde heeft), maar additief (zoals we nog kennen van de Romeinse cijfers, waarbij je alles bij elkaar moet optellen om tot het getal te komen). Eén principe van ons tientallige stelsel vindt men echter wel bij de Romeinse en Egyptische talstelsels: de bundeling van tientallen. Heel natuurlijk voor mensen met tien vingers!

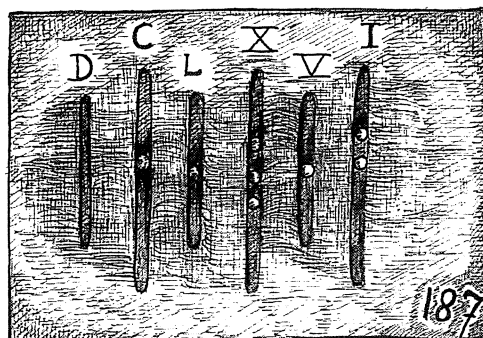


Bij het rekenen speelde evenwel de tien geen grote rol. Men schreef tien ook niet als 10 (positioneel!) en kon niet, zoals wij bij het vermenigvuldigen, het voordeel van de 0 benutten ($10 \times 34 = 340$). Het vermenigvuldigen in de oud-Egyptische rekenkunde gebeurde op basis van het verdubbelen (en het delen op basis van halveren). In sommige gevallen leidt het verdubbelen rechtstreeks en feilloos tot resultaat. Wij zouden het anno 2000 ook nog zo kunnen doen: 8×17 ? verdubbel 17, dat wordt 34. Nog een keer verdubbelen: 68, en nog een keer: 136. Maar in het geval van bijvoorbeeld 9 keer 17 moest je bij die 8 keer van zojuist er nog een keer 17 bij optellen. Welnu, die werkwijze had men tot standaardprocedure gemaakt. We spreken nu van de Egyptische vermenigvuldiging.

Bijvoorbeeld 11×17 (maar met andere symbolen voor elf en zeventien):

1×17	17 ✓		✓
2×17	34 ✓		✓
4×17	68		
8×17	136 ✓		✓
	187		

Vergelijk dit maar eens met ons cijferwerk ten behoeve van 11×17 . (Eigenlijk zullen er weinigen zijn die dit produkt niet uit het hoofd berekenen: $170 + 17 = 187$). Heel merkwaardig is het feit dat de Romeinse rekenaars gebruik maakten van een 'abacus'. Dit was een soort schema van gleuven in het zand, waarin de aantallen (rekengetallen) door middel van kleine steentjes (calculi genaamd) werden aangegeven. Wat is nu zo merkwaardig? Het feit dat de abacus eigenlijk geheel positioneel was ingericht. Er was een gleuf voor de eenheden, een voor de tientallen, enzovoort. In sommige gevallen was er ook plaats voor vijftallen, vijftigtallen, enzovoort. Wie de Romeinse cijfers kent, begrijpt de achtergrond hiervan.



Optellen op zo'n abacus ging eigenlijk niet veel anders dan bij ons het optellen onder elkaar: tientallen bundelen en inwisselen. Alleen de additieve schrijfwijze verhinderde dat het met de getallen zelf kon gebeuren ('driehonderd' werd in het genoteerde getal drie 'honderdjes': CCC) en verhinderde ook dat het vermenigvuldigen onder elkaar kon worden uitgevonden. Want daarvoor heb je echt ons talstelsel met de plaatswaarden nodig. En je hebt ook het getal nul nodig, dat later door Indische wiskundigen werd uitgevonden.

Het 'geworstel' met de Romeinse cijfers (waarmee je dus niet kon cijferen op de manier die wij nu kennen) heeft ook in onze streken lang geduurd. Pas toen de Arabische cijfers via Spanje (Moren) bij ons hun intrede deden, kwam er een kentering. Dat ging, zoals alle veranderingen van zaken die diepe wortels in het verleden hebben, niet van een leien dakje. Reeds in het jaar 1202 verscheen er een voortreffelijk rekenboek in Italië: het Liber Abaci van Leonardo van Pisa. Deze had de Arabische cijfers en het positionele stelsel (met de nul!) van zijn Moorse leermeester geleerd. De Romeinse cijfers, het additieve systeem en de abacus (die inmiddels met lijnen op papier werd getekend en door middel van schijfjes met cijfers erop werd ingevuld) kwamen er niet best van af. Maar, zoals gezegd, de vernieuwing kwam er niet zomaar door. Hoewel handelaren en boekhouders zich de voordelen van de nieuwe schrijfwijze van meet af aan ten nutte maakten, kwamen er bezwaren van anderen: het zou nu gemakkelijker zijn om rekeningen en dergelijke te vervalsen. Tot in de zestiende eeuw bleef men beide systemen naast elkaar gebruiken. Omstreeks 1504 kwam er een rekenboekje uit waarin de strijd tussen de twee partijen, aangeduid met 'abacisten' en 'algoritmici', aardig in beeld was gebracht.



In de zestiende eeuwse rekenboekjes was het pleit beslecht, het positionele stelsel had het gewonnen. Maar wie de *Cijfferinge* van meester Willem Bartjens napluist (eerste uitgave omstreeks 1604, de laatste bewerkingen ervan waren nog in de negentiende eeuw in gebruik!) vindt een mechanistische didactiek. De leerlingen wordt verteld hoe het cijferen gedaan moet worden. Waarom die geheimzinnige handelingen tot een goed antwoord leiden dient op gezag van de leraar aangenomen te worden. Deze benaderingswijze kon zelfs tot voor kort nog in Nederlandse basisschoolklassen aangetroffen worden.

Toch blijken kinderen en volwassenen soms zelf uitvindingen te doen om op school geleerde algoritmen naar eigen hand te zetten. Bij het leren van de tafels hebben we hiervan al het een en ander gezien en ook de ijzeren wet, die bij het optellen over de tien heen in sommige klassen geldt (eerst splitsen en dan aanvullen tot 10), blijkt minder hard te zijn, zoals we bijvoorbeeld zien als kinderen gebruik maken van reeds geleerde doubletten ($6 + 7 = 6 + 6 + 1 = 12 + 1$).

De les die we uit het voorgaande voor onze didactiek kunnen trekken is niet mis. In de eerste plaats blijkt het (leren) cijferen een interessante historie te hebben. Wie iets van die geschiedenis in zijn onderwijs meeneemt, biedt de leerlingen een goede mogelijkheid de wereld van het getal op een andere manier te kunnen bekijken, en meer oog te krijgen voor de schoonheid van het systeem en de inspanningen die de mens heeft verricht om het zover te krijgen. Tevens is het dan bijna onvermijdelijk om leerlingen iets van de ontwikkeling te laten meebeleven en ook ruimte te bieden om zelf kleine uitvindingen te doen. Voor de zwakke rekenaars kan vanuit dat standpunt gezocht worden naar hulpmiddelen (als de abacus), die bepaalde rekenfuncties ontlasten, of naar rekenwijzen die op concreter niveau uitgevoerd worden. Verder leert de geschiedenis van het cijferen ons dat de activiteit van het tientallig bundelen en het daarmee gepaard gaande inwisselen, essentieel is voor het vaardig rekenen in ons decimale stelsel.

Cijferen en hoofdrekenen

Cijferen valt niet weg te denken uit ons reken-wiskundeonderwijs. Het is een deel van ons cultuurbezit dat qua rekenactiviteit en leeropbrengst de moeite waard is om goed onderwezen te worden. Zelfs nu, in een tijd dat elektronische hulpmiddelen de maatschappelijke relevantie van cijfervaardigheid opnieuw ter overweging geven, heeft cijferen een meerwaarde. Voor het reken-wiskundeonderwijs op de Vrije School heeft cijferen nog een extra dimensie. Je kunt dat als volgt bekijken:

Als we zover zijn dat er bewegingsvrijheid is ontstaan in het gebruiken van de vier basisbewerkingen voor getallen tot honderd, en soms daarboven, dan is het moment aangekomen dat we ook in allerlei situaties willen rekenen, waarin de getallen te groot of te ingewikkeld zijn om ze in het hoofd vast te houden en te bewerken.

Bedenk daarbij dat er in de ambachtenperiode, bouwperiode en dergelijke, een heleboel 'rekenverhaal' is voorgekomen, waarbij het zinvol is een extern hulpmiddel te hanteren. Het leren cijferen is dan, vanuit dit oogpunt, ook op zijn plaats.

Door zijn aard is het cijferen een onderdeel van de gereedschapskist, dat van buitenaf aangeleerd wordt, maar wat een kind (op basis van het voorafgaande rekenen) kan begrijpen c.q. uitvoeren van binnen uit. De keuzen voor het aanleren van de rekenwijzen (algoritmen) moeten dan bepaald worden door de herkenbaarheid van de basisbewerkingen en de toepassing van de eerder geleerde rekenkennis en -vaardigheid. Wat er gebeurt in, of ingezet wordt vanuit het hoofd, moet op het papier te zien zijn. Vervolgens moet de weg, al werkend op papier en met inzet van reeds verworven kennis, zo kort mogelijk worden. Zo opgevat is cijferen in het eind van de derde klas en in de vierde klas een zinvolle aangelegenheid, zowel pedagogisch als rekendidactisch. Het gaat namelijk over het organiseren van rekenwerk, het overzichtelijk noteren van berekeningen, het zoeken naar systematiek, het gebruik maken van de positionele structuur van getallen en het streven naar een efficiënte rekenwijze, die mogelijk persoonlijke elementen bevat.

Nog twee opmerkingen:

In de eerste plaats zal de (reken)leerstof er nooit toe mogen dienen, dat de leerkracht er zijn autoriteit aan gaat ontlelen. Al lerend moet het kind op den duur

zijn eigen autoriteit worden, dat wil zeggen gaan vertrouwen op eigen kunnen. Ten tweede zal cijferen niet onbegrepen in de 'rugzak' mogen komen om er later, op rijpere leeftijd, uit te voorschijn gehaald te worden met de bedoeling het dan alsnog te doorzien. Ieder kind kan zich op eigen niveau toegang verschaffen tot het cijferen: laat in de levensrugzak liever heel veel ruimte over voor alles, wat we vanuit de lessen aan kwaliteiten aan de kinderen willen meegeven. Dingen die ze later hard nodig hebben!

Het hoofdrekenen, dat in het rekenen van de Vrije School altijd een belangrijke plaats heeft ingenomen, dient dus bijzondere aandacht te krijgen. Hiermee wordt de leraar in de derde klas voor een dilemma geplaatst. Wanneer kan veilig met cijferen begonnen worden, is de vraag. Iedere leraar weet namelijk dat de routine van het cijferen gemakkelijk de mentale inspanningen van het hoofdrekenen kan overschaduwden. Het schijnt zelfs wel eens voorgekomen te zijn dat leraren cijferen beschouwen als laatste redmiddel voor zwakke rekenaars, die in het gebied tot honderd geen vaardigheid en inzicht konden verwerven. "Nu kan het dan toch nog leren rekenen", werd dan gezegd.

Op dit punt willen we in dit Vrije Schoolleerplan geen misverstand laten bestaan. Het fundament voor al het verdere reken-wiskundeonderwijs wordt gelegd bij het leren rekenen tot honderd. En dat is hoofdrekenen en schattend rekenen. Daar leren de kinderen de getallen kennen zoals ze zijn. Niet 75 als een 5 op de plaats van de eenheden en een 7 op de plaats van de tientallen, maar onder meer 75 als $70 + 5$, ook als $80 - 5$ of zelfs $100 - 25$ en 3×25 (als drie kwartjes) en dus ook driekwart van 100. Een getal dat op de getallenlijn tot honderd ergens 'daar' ligt, tussen 50 en 100, of preciezer tussen 70 en 80, of tussen 74 en 76. Soms zie je 75 als $50 + 25$, en als het je uitkomt ook als $2 \times 40 - 5$... Ga zo maar door. Het is een kijk op getallen die bij het cijferen niet meer van pas komt en, als de leraar niet oppast, gemakkelijk verloren gaat. Want bij cijferen wordt niet meer gewerkt (gerekend) met hele getallen en hun interne en externe structuren, maar met losse cijfers.

Cijferen dient dus pas te beginnen als het 'fundament tot honderd' gelegd is. Maar ook dan nog moet het hoofdrekenen en schattend rekenen in de aandacht blijven. Het is wellicht een vruchtbare gedachte om hier het begrip 'gecijferdheid' te introduceren. Het woord gecijferdheid is een vrije vertaling van het Engelse 'numeracy' (numeral = cijfer). Dit werd uitgevonden naar aanleiding van het begrip 'literacy' (naast 'illiteracy', dat staat voor analfabetisme). Naast 'geletterdheid' dus 'gecijferdheid', moet de gedachte geweest zijn.

Elke volwassene dient een zekere mate van gecijferdheid te bezitten om zich in de samenleving te kunnen bewegen en handhaven. Via de media komt heel wat getalsmatige informatie op ons af, wie de krant leest moet tenminste in staat zijn een en ander naar waarde te schatten. Welnu, iemand die gecijferd is, maakt dan gepast gebruik van hoofdrekenen, van schattend rekenen, van cijferen en soms van een rekenmachientje. Het is de combinatie van die kennis en vaardigheden, die zijn gecijferdheid bepalen. Van groot belang is hierbij de zelfkennis (en het zelfvertrouwen) om in de verschillende situaties, waarin een beroep gedaan wordt op de gecijferdheid, de meest geschikte werkwijze te kiezen. Meestal komt men tot een combinatie van hoofdrekenen, schatten, cijferen en/of gebruik van een rekenmachientje.

Op de Vrije School zou men de culturele kant van het reken-wiskundeonderwijs door de maatschappelijk relevantie van gecijferd zijn, moeten laten beheersen. Zoals bovenal bleek, gaat het daarbij niet alleen om vaardigheid en inzicht, maar ook om houding, opvatting en zelfvertrouwen.

De plaatswaarde van cijfers in een getal

Aan het eigenlijke cijferen gaat een bewustwording van de plaatswaarde van de cijfers vooraf. Door hier zorg aan te besteden kan voorkomen worden dat het prille getalbegrip (weer) ondersneeuwt in het manipuleren met 'tallen'. Er wordt zo een basis gelegd voor het inwisselen, zoals dat in de eindfase van de verschillende algoritmen gebeurt wanneer er 'onthouden' of 'geleend' (!?) wordt.

Dat woord 'lenen' zou bij het rekenen verboden moeten worden. In de eerste plaats is er geen sprake van lenen, er wordt immers nooit iets teruggeven! En in de tweede plaats beïnvloeden we met dit merkwaardige lenen de moraliteit op een negatieve wijze. Niet doen dus! Houd het bij inwisselen.

Bij een aantal groter dan tien dat als getal genoteerd wordt, is in principe al ingewisseld. Zo'n handeling is eerst concreet, later op papier en tenslotte mentaal uitgevoerd. Met 'concreet, op papier en mentaal' is de leerweg die we met de kinderen willen gaan, gekarakteriseerd.

Wanneer begin je met het ordenen van aantallen in groepjes van tien? De een doet dit eerder en de ander later, maar het is zeker niet iets dat van meet af aan gebeurt. Wel dragen de 2×5 structuur van de handen en de tienstructuur van het geschreven getal dit gegeven altijd in zich. Bij de introductie van de getallen is dit evenwel nog niet geaccentueerd. Kinderen beleven het als een vanzelfsprekendheid zonder zich bewust te zijn van de cultureel bepaalde conventie erachter. Maar op een dag maak je hier geleidelijk of abrupt een leermoment van.

Tien penselen in een pot, tien potten op een plank en de volgende tien op een andere plank. Schilderstukken steeds in rijen van tien op de grond bij het nabespreken in de klas; of in rijen van tien opgehangen aan de muur. "Nu in tien passen allemaal naar je plaats." "Ik tel tot tien en dan is het stil." Of gewoon: "10, 20, ..., 110; wie niet weg is, is gezien."

Daarna kijken we nog eens terug op al dat gedoe met tien. Waarvoor al die aandacht voor tien? Een doordenkertje!

Sommigen maken zo van de 10 in de tweede klas al een bijzonder aantal. Worden aan eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort speciale kleuren gegeven dan kan dit, in de hier bedoelde zin, het cijferen voorbereiden. Hiermee stijgt het kleuren uit boven louter verfraaiing van het periodeschrift. Het kan zelfs meer zijn dan alleen een oefening om zorgvuldig getallen op (ongelinieerd) papier te noteren. Een meerwaarde dus, in het perspectief van het cijferen straks.

Maar er komt een dag waarop we de tienstructuur in het geschreven getal nog eens extra laten beleven. Dat moet een happening worden, een gebeurtenis die daarna ook model kan staan voor de inwisselhandeling en zo tot *model* kan wor-

den voor deze rekenactiviteit. Een goed gekozen en met de kinderen doorleefde gebeurtenis kan later een mentaal houvast bieden, waar ze naar kunnen grijpen wanneer het begrip van de meer abstracte cijfers zo'n houvast niet kan bieden.

Op een dag schafte ik het rekenen met losse bonen resoluut en met veel bombarie af. Alle bruine bonen, in de hele klas waren dat er in alle potjes nog een paar honderd, werden verzameld. Vervolgens verpakten we ze in luciferdoosjes in aantallen van 10. Met fraai papier werden die beplakt en zo verzegeld. Lossen, die gebruikten we niet meer, je mocht ze alleen nog horen rammelen. Er bleef maar één doosje open en dat kreeg een heel bijzondere plek in de klas. Niet lang daarna maakten we van mooi karton bakjes. In een zo'n bakje pasten precies 10 luciferdoosjes. En voor 10 van die bakjes had ik kistjes op mijn tafel staan. Ik had er ook nog een mooi verhaal bij bedacht. Later toen we het inwisselen op papier en met positiestrepen oefenden, konden ze zich dat nog herinneren. Wie daarbij nog met 'losse' wilden werken, moest ze gaan halen en vervolgens op de speciale plaats terug zetten.

Een getal kan op verschillende manieren in cijfers uitgebeeld worden:

- Met geld, wanneer ze bij het winkeltje spelen met centen, dubbeltjes en guldens betaald hebben.
- Door kinderen die door middel van hun waardigheid (prinsen 10, koningen 100, enzovoort) een bepaald 'tal' representeren.
- ✱ • Met klankstaven, waarbij elk getal onder de duizend als drieklank hoorbaar te maken is.
- Met gebaren of bewegingen die een bepaald aantal keren herhaald worden.
- Met MAB materiaal, waarin het tientallige bundelen en het inwisselen als het ware gematerialiseerd zijn.
- Met een lusabacus, die lijkt op de abacus van de Romeinen, maar op basis van didactische overwegingen twintig kralen op één staaf bezit

Pas op, in de bovenstaande opsomming is groen en rijp, kunstmatig en natuurlijk door elkaar naar voren gekomen. Ik vind dat met die koningen en prinsen echt nonsens. Hoe kun je nu in alle redelijkheid beweren dat je tien prinsen voor één koning kunt inruilen?! Geld is eigenlijk de enige natuurlijke materialisering van het positionele systeem. Enigszins dichtbij komt de kilometerteller, die niet genoemd wordt. Daarop is heel mooi te zien hoe dat inwisselen gaat. Met een lusabacus kun je dat idee naspelen, noem het maar een kilometerteller uit het stenen tijdperk.

Door twee getallen na elkaar of gelijktijdig uit te beelden, kan ook naar hun som of hun verschil of naar de aanvulling tot bijvoorbeeld 1000 gevraagd worden. Zo wordt het cijferen op papier voorbereid. Daarbij geldt dan weer de gouden regel: Wat gedaan en zelf ervaren is, daarvan kun je op papier verslag doen. Steeds gaat het bij al deze activiteiten om het leren denken in 'tallen', met daarbij op de achtergrond het bundelen en inwisselen.

Ik liet de kinderen heel eventjes, zodat er niet geteld kon worden, in een gedeeltelijk met eieren gevulde doos (van tien stuks) kijken. Ze raadden hoeveel er in zaten, of hoeveel er ontbraken. We schatten vervolgens hoeveel dozen we nodig hadden in een week, als de kippen elke dag (gemiddeld) 28 eieren legden. Dat rekenen kan alle kan-

ten opgaan: 7×2 volle dozen en 7 dozen waar er 2 ontbreken. Dat is 140 eieren en nog $70 - 14$. Samen $140 + 56$. Of 7×3 volle dozen, min 14, dat is $210 - 14$. Hopelijk komt daar hetzelfde uit, mompelde ik. "Dat kun je toch zo zien!", werd ik op m'n nummer gezet. Daarna tekenden we wat we bedacht hadden. De een meer en de ander minder schematisch, wel geleidelijk steeds meer met gebruikmaking van getallen.

Met dobbelstenen kunnen spelen verzonnen worden, waarbij de plaatswaarde van de cijfers in een getal extra aandacht krijgt:

- Op de zijvlakken van een dobbelsteen staan verschillende getallen (bijvoorbeeld 3; 6; 8; 11; 32; 40). Op de bank liggen lucifers. Gebroken stokjes zonder kop tellen voor 1; die met kop voor 10 en de hele lucifers voor 100. En nu maar dobbelen. Wie heeft als eerste 1000 bij elkaar? Luciferstukjes kunnen daarbij voor grotere gehelen ingewisseld worden.
- Elke speler zet naast elkaar drie stippen op zijn papier. Om beurten wordt er gedobbeld. Het cijfer dat je gooit, vul je in op één van de stippen. Je mag kiezen welke stip je wilt nemen, je gooit om de beurt. Wie heeft, nadat er zes keer geworpen is, het grootste getal?

Als we wat verder zijn met het cijferen, kunnen ook verwondering en bewondering een piek krijgen:

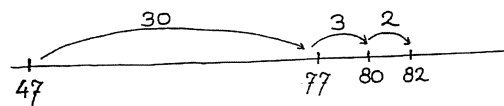
- Schrijf een getal op van drie cijfers, draai het om en trek de getallen van elkaar af. Het middelste cijfer is nu steeds een 9, de buitenste cijfers zijn samen negen.
- Draai in het vorige geval het laatste cijfer weer om en tel het voorgaande op. Er komt altijd 1089 uit. Kan iemand dat verklaren?
- Neem een getal van drie cijfers. Schrijf het getal er achterstevoren onder. Tel op. Draai nu het verkregen getal weer om, zet het eronder en tel op. Ga zolang door tot je een getal krijgt dat door omkering niet meer verandert (dit lukt meestal na enkele keren, maar niet altijd).

Dat bij deze opgaven het cijferend optellen en aftrekken al bekend is, zal duidelijk zijn. We laten ermee zien dat het nadenken over de plaats van de cijfers in een getal steeds weer vanuit nieuwe invalshoeken mogelijk is.

Optellen onder elkaar (cijferend optellen)

Ook het leren optellen onder elkaar vergt een langer lopend leerproces. Tussen het 'uit het hoofd' weten, het uitrekenen of schatten hoeveel twee getallen samen zijn en het cijferend optellen van twee getallen, zijn andere vormen voor rekenen op papier mogelijk. Denk bijvoorbeeld aan het optellen via sprongen op de lege getallenlijn, of aan het kolomsgewijze optellen: $47 + 35 = \dots$

'Rijgen':



'Kolomsgewijs':

$$\begin{array}{r}
 47 = 40 + 7 \\
 35 = 30 + 5 \\
 \hline
 70 + 12
 \end{array}$$

'Hoofdrekenend':

$$47 + 30 = 77 ; \quad 77 + 5 = 82 .$$

'Met positiestrepen', schriftelijk:

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 4 & 7 \\
 + & 30 \\
 \hline
 7 & 12 \\
 \hline
 8 & 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

'Schriftelijk', speels en met inzicht in de plaatswaarden:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 1 & 6 & 8 \\
 + & 2 & 57 \\
 \hline
 & 1 & 5 \\
 & 1 & 0 \\
 & 3 & 00 \\
 \hline
 4 & 2 & 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

Zulke manieren houden het getalbeeld langer intact en bereiden toch het rekenen met grotere getallen op papier voor. Het anticipeert ook op het kolomsgewijs rekenen, met meer dan twee getallen, zoals je dat op kassarollen wel doet.

Hoe introduceer je nu zo'n 'nieuwe' werkwijze? Tussen de twee uitersten "Kijk kinderen, de grote mensen doen het zo" en "Dit boek heeft 124 bladzijden, we zijn nu op bladzijde 88, hoeveel bladzijden zijn er nog te lezen? Hoe zou je dat uitzoeken?", ligt een pedagogische beslissing over wat je bij je leerlingen wilt wekken. Alsook de keuze voor een onderwijsstijl waar je achter kunt staan en die bij 'leerlingen van nu' past.

Bij beide uitgangspunten is het mogelijk om van een zelf ervaren situatie uit te gaan, om rekenen iets anders te laten zijn dan manipuleren met kale cijfers. Meer iets dat je gebruikt in situaties waar mensen samenwerken en proberen elkaar te begrijpen. Die gedachte zou van meet af aan het rekenonderwijs kunnen doordringen en niet pas achteraf in toepassingssituaties moeten blijken.

Pas op. Het eerstgenoemde uitgangspunt ("Kijk kinderen, de grote mensen doen dat zó") roept gemakkelijk een misverstand op. Men kan namelijk geneigd zijn te denken, dat hier voorgedaan wordt hoe 'het moet', waarna de kinderen die werkwijze van volwassenen gaan nabootsen.

Een dergelijk mechanistische aanpak is hier evenwel niet bedoeld. Wat dan wel?

Wie kan dit "geheimschrift" doorgronden?

$$\begin{array}{r} 693 \\ 750 \\ \hline 1443 \end{array}$$

Op een morgen kwam ik de klas binnen met wat cijferwerk, dat volwassenen (in een bepaalde situatie) op hun blaadje hadden genoteerd. Wie kan dit 'geheimschrift' doorgronden?

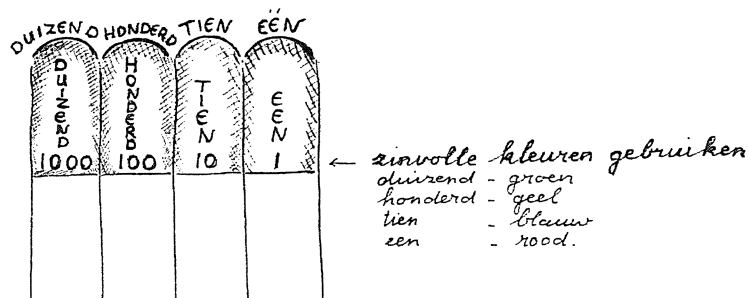
Een ander aardig moment ontstond in de klas toen we al wat verder waren met cijferend optellen en aftrekken, en het volgende blaadje moest worden 'ontcijferd'.

$$\begin{array}{r} 843 \\ 229 \\ \hline 626 = \\ 614 \end{array}$$

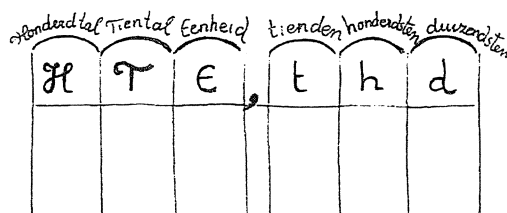
Na heel wat discussie kwamen we er achter dat daar met 'tekorten' werd gerekend. Er was een nieuwe rekenwijze uitgevonden! Zo voelden de kinderen dat ook aan.

Ik kwam toen ook op het idee de kinderen volwassenen in hun eigen omgeving (thuis) te laten interviewen over de manier waarop ze cijferen (hebben geleerd). Je moet ze dan vragen de blaadjes, waarop dat uitgelegd is, mee naar school te nemen.

Wanneer er lang genoeg is stilgestaan bij de plaatswaarde van de cijfers in een getal en vervolgens het cijferen onder elkaar geïntroduceerd wordt, kan er 'per tal' in kolommen gewerkt worden. Het is dan praktisch die kolommen aanvaardelijk te benoemen naar hun plaatswaarde: eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort. Zo ontstaat dan een papieren abacus, aangegeven met positiestrepen.



Later kan dit schema met de kommagetallen uitgebreid worden tot:

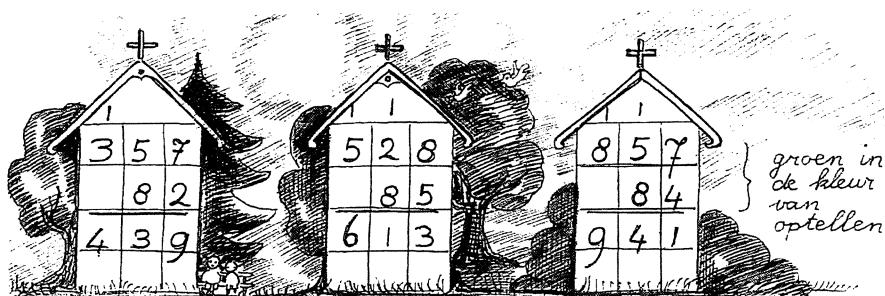


'Onthouden' hoeft daarbij niet van meet af aan gepraktiseerd te worden. Eerst wordt er vertikaal in de kolommen opgeteld. Daarna, als alle kolommen zo behandeld zijn, wordt er ingewisseld en hergroepeerd. Zonodig begint het inwisselen opnieuw. We werken daarbij van rechts naar links, anders dan bij het hoofd-rekenen, waar natuurlijk eerst de grote delen worden samengenomen.

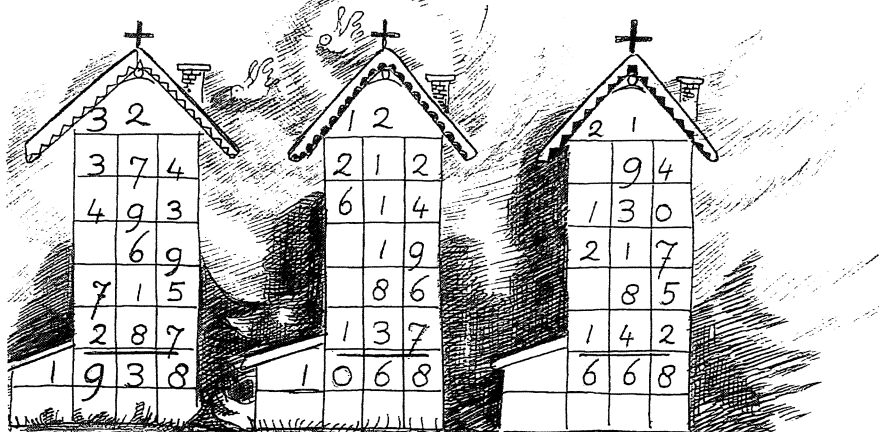
Een voorbeeld:

L	H	T	E
	3	5	7
	+	8	2
	3	13	9
	4	3	9

Voor veel kinderen is het aanvankelijk lastig om meer dan twee getallen (onder de tien) 'uit het hoofd' op te tellen, vooral wanneer je daarbij boven de twintig komt. Dat leidt dan tot nog eens overdoen, om zeker te zijn. Zijn de uitkomsten ongelijk, dan is een derde berekening nodig om uitkomst te bieden. De ervaren rekenaar hanteert hierbij allerlei persoonlijke handigheidjes om deze onhandige procedure te bekorten.



*Zeven en twee is negen.
Vijf en acht is dertien.
De drie schrijf ik op, de tien zet ik op zolder,
die tel ik nu mee: drie en één is vier.*



Op zolder bewaar je, wat je niet meteen op kan schrijven

Zo'n handigheidje is ook hierna in het voorbeeld 'optellen met onthouden' gebruikt. De zwakke rekenaar kan er steun aan hebben omdat 'rekenen boven de twintig' nu niet nodig is en juist het rekenen onder de twintig, dat bij zulke leerlingen vaak onvoldoende geautomatiseerd is, nog eens extra geoefend wordt.

H	T	E
3	7	4
4	9	3
7	2	8
2	1	8
3	2	8
6	1	8
9	3	8

H	T	E
3	7	4
4	9	3
7	2	8
2	1	8
3	2	8
6	1	8
9	3	8

$$\begin{array}{r}
 374 \\
 493 \\
 69 \\
 715 \\
 + 287 \\
 \hline
 1938
 \end{array}$$

Naast elkaar staan hier nog eens drie vormen voor het cijferend optellen onder elkaar. Bij de linker vorm is er gewerkt met kolommen en inwisselen zoals hiervoor beschreven werd. Bij de middelste vorm wordt het onthouden ingeleid, het cijfer dat ingewisseld wordt is al klein geschreven. Bij de laatste vorm is onthouden wat ingewisseld moet worden. Dit is de meest verkorte werkwijze, die nu ook voor een groot deel uit een mentale handeling (in het hoofd dus) bestaat. Noodzakelijk voor het vinden van het antwoord is dat laatste niet. Het hoeft niet zo kort en er kan meer op papier komen.

Kinderen zijn erbij gebaat de fase van het 'onthouden' in eigen tempo te bereiken. Een zwakke rekenaar, die problemen heeft met het tegelijkertijd onthouden en rekenen, hoeft dat niveau niet te bereiken. Dat geldt straks ook voor de andere bewerkingen.

Het aanvankelijk hardop verwoorden van hetgeen gedaan wordt tijdens het uitrekenen ondersteunt het leerproces. Globaal gezien kan dit leerproces dan via de volgende fasen verlopen: eerst concrete handelingen (bijvoorbeeld met geschikt materiaal), dan het beschrijven van die handelingen op papier (ondersteund door de papieren abacus), vervolgens worden de handelingen hardop verwoord en tenslotte gebeurt dit alles 'in het hoofd'. Het mentale niveau is bereikt. Onderweg kunnen verkortingen (handigheidjes) worden aangebracht, zodat de uiteindelijke mentale handeling zo efficiënt mogelijk is voor die bepaalde rekenaar.

Hiervoor was sprake van een handigheidje. Sommige leraren en leerlingen spreken in dergelijke gevallen over foefjes. Dat zou ik niet doen, want het woord foefje roept een verkeerd beeld van het rekenen op. Het woord 'handigheid' klinkt positiever, kan iets persoonlijks hebben en bij rekenen dient er altijd een redenering aan het werk ten grondslag te liggen.

Wie later het optelalgoritme nog eens bewust wil maken kan uit de voeten met 'getalgriezels'. Eén keer op dit spoor gezet vinden kinderen het leuk om dergelijke opgaven voor elkaar te bedenken. Vraag dan wel of ze zelf het antwoord ergens willen bewaren!

Een klein voorbeeld:

"Getalgriezels"

$$\begin{array}{r}
 . 0 8 \\
 + 4 9 . \\
 \hline
 8 . 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 7 . \\
 + . 5 \\
 \hline
 . 0 9
 \end{array}$$

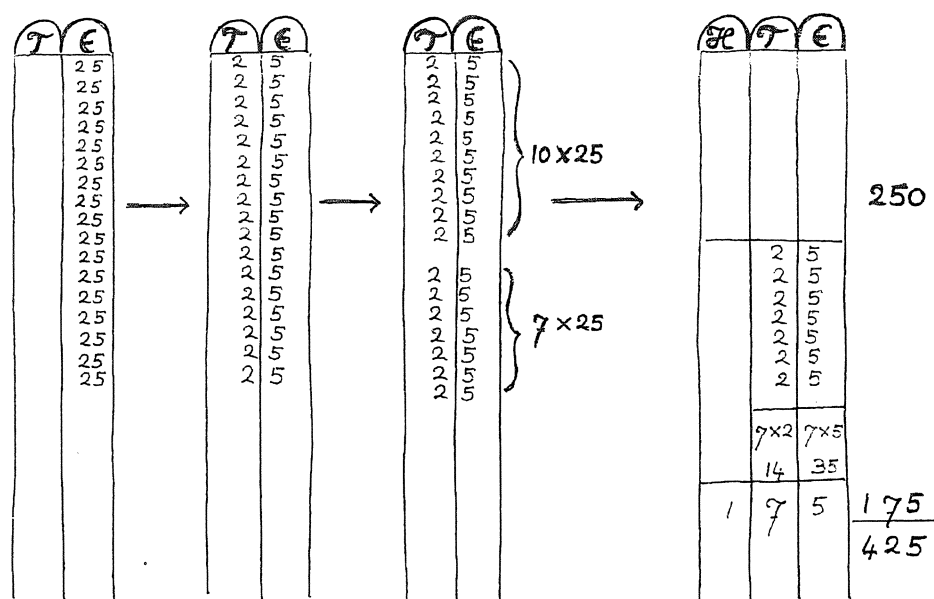
Wat moet op de stippen staan?

Cijferend vermenigvuldigen

Ziet men het vermenigvuldigen als een herhaalde optelling, dan ligt het voor de hand om cijferend vermenigvuldigen in nauwe aansluiting op het cijferend optellen te ontwikkelen. En wel op twee sporen, die pas bij het vermenigvuldigen van twee getallen van twee cijfers in elkaars verlengde komen te liggen. Het ene spoor volgt het schattend vermenigvuldigen, nu ook met getallen groter dan 100. Het andere spoor staat aanvankelijk geheel in dienst van het door elkaar oefenen van tafelp producten van één tafel per opgave.

Daartussen loopt nog een derde spoor. Dit is het spoor van de 'natuurlijke' aanpak. Het begint met een probleem, waarvoor de kinderen nog niet direct een oplossing bij de hand hebben. Bijvoorbeeld: "Er staat in de gang een groot aantal pakken met schriften. Hoeveel zouden dat er zijn?" Na telling blijken er 17 pakken te staan, van elk 25 schriften.

"Hoe kunnen we dat aantal uitrekenen?" Het idee wordt dan geopperd om dat met de (papieren) abacus te doen. Dat is er één met behoorlijk lange kolommen (staven).



'In vier stappen'

Het schema (de positiestrepen van de papieren abacus) noodt tot structureren, eerst naar tientallen en eenheden, vervolgens naar groepen van tien. Want $10 \times 25 = 250$. Wie die rekenregel niet door heeft, kan hem op de abacus ook nog eens zien ontstaan. Want de 0 'erachter plaatsen' is uiteindelijk niets anders dan 'een plaatsje opschuiven', hier tien vijfen inwisselen voor vijf tientallen, net als in de tafel van 5 al, onopgemerkt, gebeurde: $10 \times 5 = 50$.

Nu, na de afsplitsing van 10×25 , is er nog 7×25 te berekenen.

Langzamerhand ontwikkelt men zo, samen met de kinderen, een rekenwijze voor het cijferend vermenigvuldigen, die uitmondt in een vaardige toepassing van de bekende standaardprocedure op mentaal niveau. Zwakke rekenaars krijgen de vrijheid om op een minder hoog niveau toch cijferend te vermenigvuldigen, ook met grote getallen.

En nu de beide andere sporen. Eerst het schatten verbonden met het handig rekenen, waarbij aanvankelijk de getallen in de buurt van de 100-tallen gekozen werden.

"Is 5×201 groter of kleiner dan 1000?" Bij zulke vragen plukte ik de vruchten van het al vaak gespeelde spel: Ik heb een getal in gedachten, het is groter dan 200 en kleiner dan 300; of de variant daarop: "Het zit in de tafel van 2 en is groter dan 4×2 en kleiner dan 8×2 , enzovoort."

Nadat de tafel van 200 een paar keer gezegd was, leverde het uit het hoofd vermenigvuldigen van 100-tallen weinig problemen op. Datzelfde gold voor het vervangen van 201 door 200.

Dan het andere spoor, waarmee de tafels nog eens extra geoefend kunnen worden.



Daar komt "Spring in het veld", het gele vermenigvuldig kabouterijtje, dat als een lichtflits, roetsj, roetsj komt aangesnel:

"Zes heer acht is achtenveertig, acht schrijf ik op, de vier doe ik op m'n hoofd."

Vijf keer zes is dertig, plus de vier van m'n hoofd, maakt vierendertig; die vier schrijf ik op, drie doe ik op m'n hoofd."

Vier keer zes is vierentwintig, plus de drie van m'n hoofd maakt zevenentwintig"



Op een morgen had ik de tafel van 6 nog eens goed 'bewogen'. Bij het 'door elkaar' vragen waren daarbij een paar lastige tafelproducten op het bord geschreven.

Bijvoorbeeld 6×458 . Dat deden we nog eens netjes en in kleur over.

En zo ontstond (a): 6×8 (enen) = 48 'eenheden'. En 6×5 (tienen) = 30 'tientallen', vervolgens 6×4 (honderden) = 24 'honderdtallen'.

Niet lang daarna gebruikte ik de meer compacte schrijfwijze (b1): 2400 en 48 passen toevallig op een regel als 2448; 30, eigenlijk 300, moet dan nog apart vermeld worden. Nog weer later (b2): de cijfers van de tientallen op één regel, en ook die van de eenheden. Zo dus: $6 \times 8 = 48$, noteer 4 als tiental en 8 als eenheid. Dan 6×5 , met de wetenschap dat het antwoord nu één plaats naar links komt te staan, omdat 5 staat voor 5 tientallen. Dus $6 \times 5 = 30$, noteer de 3 als tiental (maar op de plaats van de honderdtallen) en de 0 als eenheid (maar op de plaats van de tientallen). Nu $6 \times 4 = 24$, de 2 op de plaats van de tientallen (hier duizendtallen) en de 4 op de plek van de eenheden (hier honderdtallen).

Met (c) werkte ik het 'onthouden' in de hand. Bijvoorbeeld bij $6 \times 8 = 48$ eerst de 8 op de goede plaats te noteren, en dan de 4 in de rij erboven, een plaats naar links.

Wie dat ging doen kwam uit bij (d), waar in één keer het antwoord wordt genoteerd: $6 \times 8 = 48$; schrijf op de 8 en onthoud 4 (tienen); $6 \times 5 = 30$ (tienen), plus 4 (tienen), is 34 (tienen). Noteer 4 en onthoud 3 (honderdtallen). Enzovoort.

Zoiets doe je natuurlijk niet in een paar dagen.

$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \times \\ \hline 48 \\ 30 \\ \hline 24 \\ \hline 2748 \end{array}$	$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \times \\ \hline 2448 \\ 30 \\ \hline 2748 \end{array}$	$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \times \\ \hline 234 \\ 408 \\ \hline 2748 \end{array}$	$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \times \\ \hline 234 \\ 408 \\ \hline 2748 \end{array}$	$\begin{array}{r} 458 \\ 6 \times \\ \hline 2748 \end{array}$
(a)	(b ⁱ)	(b ⁱⁱ)	(c)	(d)

Worden vervolgens ook opdrachten gegeven om grote aantallen te bepalen, bijvoorbeeld totalen uit een aantal dozen met nietjes, met elastieken, met lucifers, enzovoort, dan kan dat wat rekenkundig ontdekt is, ook praktisch toegepast worden.

Bij de eerder genoemde 'natuurlijke aanpak' van het cijferen op school, is het praktische toepassingsgebied van het cijferen van meet af aan in beeld. De gang van zaken is daar, didactisch gezien, precies andersom. De rekenkundige bewerking wordt geconstrueerd op basis van praktische problemen; hier wordt de rekenkundige bewerking 'theoretisch' behandeld, en later praktisch toegepast. Welk spoor men ook kiest, het mag niet gebeuren dat men aan het toepassen niet toekomt!

Er kan op verschillende manieren gewerkt worden: schattend, tellend, optellend, vermenigvuldigend. Wat handig is, wordt zo al doende ervaren. Het rekenen wordt daarbij aangezet vanuit echte situaties, die bij kinderen het vermenigvuldigen oproepen. Wie kinderen wijst op bepaalde vermenigvuldigstructuren laat het mes aan twee kanten snijden: men ziet de toepassingen en ondervindt steun bij het cijferen.

Eén van de opgaven van een rekenkaart of werkblad (zie ook Terzijde: Over werkvormen) is:

Hoeveel dagen telt je opa op zijn 72^e verjaardag? Probeer dat zelf uit te zoeken!

Vragen en situaties als op zo'n werkblad kunnen het vermenigvuldigen met grote(re) getallen uitlokken. Het 'zoek dat zelf uit' houdt weer zowel een pedagogische als een didactische keuze in. Eerder zijn bouwstenen aangereikt. Wil je de leerlingen zelf, onder begeleiding en met ruimte voor eigen inbreng, een algoritme laten opbouwen of kies je voor een gestuurd leerproces dat sterk bepaald is door de standaardprocedures van het cijferen?

Valt je keuze op het zelf ontdekken, dan bewandelt niet ieder kind een zelfde weg naar het eindalgoritme. En er wordt niet gemeenschappelijk op eenzelfde niveau gewerkt. De leerlingen construeren via zelf ontdekte verkortingen de uiteindelijke vorm waarin zij het algoritme gaan uitvoeren. De leraar die hiervoor kiest, moet stevig in zijn schoenen staan. Behalve een diep inzicht in verschillende varianten van cijferprocedures, moet hij zijn leerlingen ook goed kennen naar rekenvaardigheid en inzicht. Bovendien is kennis van de verschillende niveaus, waarop gecijferd kan worden, noodzakelijk.

Hieronder een schets van de mogelijke niveaus waarop de vraag "Hoeveel dagen telt je opa op zijn 72ste verjaardag?" met cijferwerk aangepakt kan worden. Vergeten we even de schrikkeljaren tijdens de 72 jaar van opa (het zijn er misschien 18, of 19?), dan gaat het om de vermenigvuldiging 72×365 .

Op het meest primitieve niveau worden (in gedachten, of echt op papier) 72 keer 365 onder elkaar gezet. Dat wordt een fikse optelling, misschien dat de kinderen door de nood gedwongen toch kleine verkortingen (tafels toepassen of $10 \times$ zien) aan gaan brengen.

Op een iets hoger niveau brengen de kinderen direct al structuur aan in de lange optelrij onder elkaar. Ze maken 7 'brokken' van 10×365 en moeten daar dan nog 2×365 aan toevoegen.

Op een nog hoger niveau is het vermenigvuldigen al in zicht. Men ziet in één klap 70×365 , later te vermeerderen met 2×365 . Die eerste vermenigvuldiging kan nog met de steun van de papieren abacus gedaan worden:

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">4</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> </table>			3	6	5			7	0				3	5	0		4	2	0	0	2	1	0	0	0	2	5	5	5	0	x	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">+</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> </table>	2	5	5	5	0		+	7	3	0	2	6	2	8	0
		3	6	5																																											
		7	0																																												
		3	5	0																																											
	4	2	0	0																																											
2	1	0	0	0																																											
2	5	5	5	0																																											
2	5	5	5	0																																											
	+	7	3	0																																											
2	6	2	8	0																																											

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">365</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2 x</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">10</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">120</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">600</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">730</td><td></td></tr> </table>	365		2 x		10		120		600		730	
365												
2 x												
10												
120												
600												
730												

Op de volgende niveaus worden de handelingen van het inwisselen steeds meer mentaal uitgevoerd. De meest gevorderden maken gebruik van de standaardprocedure, zoals die algemeen bekend is.

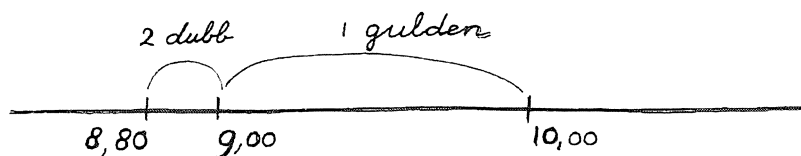
$$\begin{array}{r}
 365 \\
 \times 72 \\
 \hline
 730 \\
 25550 \\
 \hline
 26280
 \end{array}$$

De bovenstaande niveaus geven een onderwijsroute aan, die voor een individuele leerling anders kan verlopen; of doordat deze nog andere notatievormen gebruikt, of omdat niet alle stappen nodig waren voor het verwerven van de vaardigheid en het daarbij gewenste inzicht.

Aftrekken onder elkaar

"Dat was dan f 8,80, voor u nog twee dubbeltjes en één gulden terug."

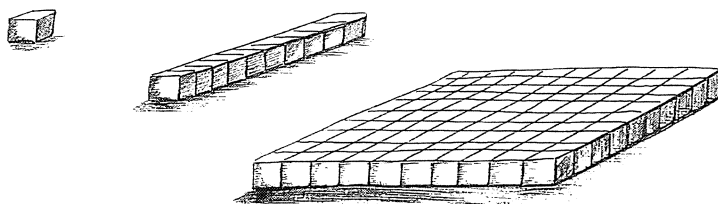
Zo wordt er aan een kassa teruggegeven na betaling met een tientje. Men kan op die manier het aftrekken middels aanvullend optellen omzeilen. Dat is in deze situatie een vrij natuurlijke aanpak, die in de didactiek met 'op-een-rij' of 'rijgmethode' wordt aangeduid. Het is een handige manier van hoofdrekenen, het materiaal (hier de twee dubbeltjes en de gulden) geeft concrete steun. Later kan een dergelijke steun, op schematischer niveau, door de lege getallenlijn geboden worden. Het aanvullen gebeurt dan in principe op dezelfde wijze:



Maar we zouden het over *cijferend* aftrekken hebben, en daar gaat het weer anders toe.

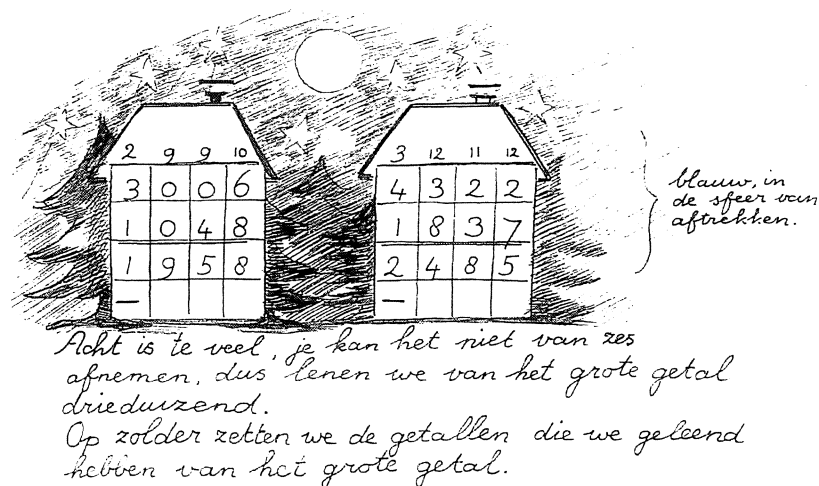
Ook dan dient de leraar een eigen keus te maken. En ook in dit geval van aftrekken heeft die keus een pedagogische en didactische dimensie. Laten we eens zien wat er didactisch mogelijk is.

In de eerste plaats kan men uitleggen, hoe de rekenwijze van het aftrekken onder elkaar werkt en waarom die werkwijze tot een goed antwoord leidt. Een veelgebruikt hulpmiddel is het MAB-unifixmateriaal, met eenheden (kubusjes van ca 1x1x1 cm), staafjes (van 10 eenheden), plakken (van 10 x 10 eenheden) en een kubus (van 10 plakken). De eenheden, tientallen, honderdtallen en duizendtallen zijn duidelijk gestructureerd en laten over het inwisselen geen enkel misverstand bestaan. De didactiek, die hiervan gebruik maakt, wordt wel eens gekarakteriseerd als een structuralistische didactiek. De structuur van de standaardprocedure is uitgangspunt. Deze werkwijze sluit ook aan bij het inpakken van de 'tallen' in steeds grotere eenheden, zoals dat gebeurde in een doorkijkje.



Evengoed kan hier met geld gewerkt worden, al zijn er leraren, die het ontbreken van echte centen in het geldverkeer van nu als een didactische beperking zien. Een andere mogelijkheid is om de kinderen zelf te laten uitzoeken hoe de standaardprocedure, door volwassenen gebruikt, eigenlijk werkt. De leraar moet dan wel proberen de kinderen ook te laten uitdenken, waarom die rekenwijze goed werkt. Dus niet louter instrumentele kennis ontwikkelen, maar ook inzichtelijke.

In de loop der tijd hebben leraren geprobeerd de rekenwijze van allerlei 'franje' te voorzien, met het doel het voor de kinderen gemakkelijker te maken. Men kan er nu niet meer omheen te constateren dat sommige 'versieringen' mechanistische trekken vertonen. De didactische inzichten zijn inmiddels zover gevorderd, dat elke leraar nu zijn eigen keus kan maken en precies weet waarvoor hij kiest.



Tenslotte noemen we de aanpak, die dicht staat bij de leergang zoals die geschetst is bij het optellen onder elkaar:

- Eerst op de lus-abacus met concrete handelingen voor het wegnemen en inwisselen.
- Dan noteren in het schema van de positiestrepn op papier.
- In toenemende mate verwoorden en zo mogelijk verkorten.
- En tenslotte mentaal, als de rekenhandelingen uit/in het hoofd gebeuren.

Hier spreekt men van de reconstructiedidactiek: de kinderen (re-)construeren zelf de rekenwijze. Een didactiek die zich onderscheidt van de reproductiedidactiek, waarmee de leerlingen alleen leren het voorgezegde na te doen, te reproduceren.

Voor de aardigheid laten we hier nog drie verschillende rekenwijzen (op het hoogste niveau van de standaardprocedure) volgen. De eerste is 'oer-Hollands', de tweede hebben we op bladzijde 85 al ontmoet en gaat via het rekenen met tekorten. Tenslotte is er de rekenwijze die bekend staat als 'de Oostenrijkse aftrekking'. Je kunt ook zeggen: de methode van het voorschieten.

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3006 \\ - 1048 \\ \hline 1958 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3006 \\ - 1048 \\ \hline 2042 \\ 1958 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3006 \\ - 1048 \\ \hline 2068 \\ 111^* \\ \hline 1958 \end{array}$$

Ziet u wat er allemaal gebeurd is?

Hier kan men even denken aan het inwisselen van tien amethyststeentjes voor een tijgeroog. 8 van 6 gaat niet, bedenk 16 (dus denk er een tijgeroog bij) en noteer die even op de goede plaats (in de kolom onder de 4) om niet te vergeten. Nu staan er dus 5 (= 4 + 1) tijgerogen om eraf te halen! Nu 5 van 0 gaat niet, bedenk 10, enzovoort.

De rekenwijze oorspronkelijk gebruikt, volgt een andere redenering, die natuurlijk uiteindelijk op hetzelfde neerkomt. Er wordt dan niet gedacht aan aftrekken ($6 - 8$) maar in termen van optellen: $8 + \dots = 6$. Je ziet dan dat het alleen maar $8 + 8 = 16$ kan zijn en schrijft dan de 8 op, en ook de 1 (10 dus) van 16. Dan gaat men verder: $5 + 5 = 10$; noteer de 5 en de 1 (eigenlijk 100), enzovoort.

De staartdeling

Geldt ook voor cijferend delen, net als bij temperamentsrekenen, dat het gelijktijdig met de andere cijferbewerkingen ingevoerd moet worden? Het antwoord hierop is "Nee". Het gaat immers om het leren van een cultureel bepaalde werkwijze en niet om het creëren van een bewerking. Bovendien vooronderstelt hier de ene werkwijze vaardigheid in de andere.

Wie cijferend delen volgens de reconstructiedidactiek wil onderwijzen, kan dit ontwikkelen in nauwe aansluiting met cijferend aftrekken.

"Maaikes moeder kocht voor de verjaardag snoepjes. Maaïke telde ze, het waren er 68. Ze verwacht drie vriendinnetjes, zodat ze met z'n vieren zullen zijn."

Met een dergelijk probleem kan de leergang begonnen worden. Het is een opgave waarvan de kinderen in klas 4 (5) niet direct op basis van hun tafelkennis de oplossing zien. Bovendien is het een probleem waarmee ze concreet aan de gang kunnen. Als de snoepjes (of representanten ervan) in concreto aanwezig zijn, worden er natuurlijk even vier bakjes bij gezocht. En eerlijk verdelen kan iedereen. Wat is precies de vraag? "Hoeveel snoepjes krijgt elk in het zakje, als ze eerlijk verdeeld worden?"

De klas gaat als geheel of in kleine groepjes aan het verdelen. Onderwijl, of naderhand, kan de gang van zaken schematisch weergegeven worden op het bord. Het is een rechthoekschema, met de vier zakjes (of namen van de kinderen) bovenaan en de aantallen snoepjes, zoals die stap voor stap werden verdeeld, eronder



In de schaal zijn 68 lekkertjes. Maaïke heeft ze geteld. Nu mag ze ze gaan verdelen over vier bakjes: voor haar drie vriendinnen en haarzelf.

$68 : 4 = \dots$					
68					
- 40	10	10	10	10	→ 40
28	5	5	5	5	→ 20
- 20	2	2	2	2	→ 8
8				17	
- 8					
0					

Was dit verjaardagsprobleem voorafgegaan door een ander, dat op bovenstaande manier is behandeld, dan kan deze verdeling nog schematischer worden aangepakt.

In het geval dat er 68 snoepjes zijn voor vijf kinderen zie je dan:

68					
<u>5</u>	1	1	1	1	1
63					
25	5	5	5	5	5
<u>38</u>					
30	6	6	6	6	6
<u>8</u>					
5	1	1	1	1	1
<u>3</u>					

*Eerst nog voorstelling,
opweg naar cijferen.*

Deze werkwijze wordt door de kinderen in de klas ontwikkeld. De leraar levert, zo mogelijk tijdens het werk, het notatieschema. Hij zorgt er voor dat dit notatieschema nauw aansluit bij de werkwijze van het verdelen. De kinderen zien hun werkwijze weerspiegeld op het bord.

Er volgen meer van deze problemen, de deeltallen worden groter en langzaam aan ook de delers. We sturen in deze fase ook aan op het plezier in eigen ontdekkingen die op basis van inzicht in de concrete handeling (verdelen, uitdelen, inpakken, ...) tot stand kunnen worden gebracht.

- “Als moeder nu eens 112 snoepjes gekocht had, zouden er dan genoeg traktaties zijn voor alle 28 kinderen uit de klas?”
- “Wim vond op zolder een doos vol 413 buttons met bekende voetballers erop. Hij mag ze eerlijk verdelen met zijn vriendjes van het voetbalteam. Samen twaalf. Hoeveel buttons krijgt elk?”

Op een gevorderd niveau van verkorting (de sliert met ‘happen van tien’) ziet de oplossing van het laatste probleem er als volgt uit:

12	413	
	<u>120</u>	10
	293	
	<u>120</u>	10
	173	
	<u>120</u>	10
	53	
	<u>48</u>	4
	5	34 over 5

De werkwijze is nu bekend, er zijn al heel wat opgaven gemaakt, nu gaat het erom vlugger en met grotere getallen te werken. Daarbij komt het handig rekenen, verdubbelen en halveren, samennemen van ‘tussen antwoorden’, rekenen met nullen, maar ook globaal schattend rekenen als vanzelf onder de aandacht. De kinderen kunnen van elkaars vondsten leren. Door ze uit te dagen het steeds korter te doen, kan ieder op eigen niveau -en dus gedifferentieerd- aan dezelfde opgaven werken.

De 'grootste mooie hap' markeert nu het moment, dat de fase van het eindalgoritme bereikt wordt. Dat kan er bijvoorbeeld als volgt uit zien:

$$\begin{array}{r}
 17 \overline{) 365} \\
 \underline{340} \\
 25 \\
 \underline{17} \\
 8 \\
 \text{rest } 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{) 365} \quad 20 + 1 = 21 \\
 \underline{340} \\
 25 \\
 \underline{17} \\
 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{) 365} \quad 21 \\
 \underline{34} \\
 25 \\
 \underline{17} \\
 8
 \end{array}$$

Het werken met resten hoeft nu geen probleem te zijn. Door van meet af aan en op elk moment in de staart af te trekken met complete getallen, wordt een rest ook beleefd als datgene wat overblijft.

Niet alle leerlingen zullen al snel tot deze eindvorm overgaan. Dat is ook niet nodig om tot het juiste antwoord te komen. Wel kan het voor de wat langzamere leerling een steun zijn, zeker als de delers groter worden, om het berekenen van de happen niet langer binnen het bewerkingsschema, maar veeleer er naast in een afzonderlijke tabel uit te schrijven. Bij de bovenstaande opgave komt dat neer op:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 17 \\ \hline 10 & 170 \\ \hline 20 & 340 \\ \hline \end{array}
 \quad \text{of} \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 17 \\ \hline 2 & 34 \\ \hline 20 & 340 \\ \hline \end{array}$$

Ook het happenschema kan steeds meer verkort worden. Zo komt het accent nu haast ongemerkt op het handig rekenen binnen het happenschema te liggen.

Welke notatie willen we dat onze leerlingen (uiteindelijk) hanteren? Er zijn in Nederland verschillende in gebruik:

$24 \overline{) 5621} \dots$ is wel de van oudsher meest bekende. De kinderen zien niet direct dat het om een deling gaat, die schreven ze immers als $5621 : 24$, waarin deeltal en deler een andere volgorde hebben.

Hetzelfde geldt eigenlijk ook voor de hiervoor gehanteerde notatievorm. Plaatsen we de deler achter het deeltal, dan is dit verband wel direct te zien. In principe verandert er dan rekenkundig niets en didactisch maar weinig, en wie inventief is kan bovendien aan die notatiewijze ook een bruikbare betekenis geven.

$$\begin{array}{r}
 24 \overline{) 5621} \\
 \underline{- 4800} \\
 821 \\
 \underline{- 720} \\
 101 \\
 \underline{- 96} \\
 \text{rest } 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 234 \\
 \text{rest } 5 \\
 200 \\
 30 \\
 4 \\
 \hline
 234
 \end{array}$$

← daar te plaatsen.

234 rest 5

$$\begin{array}{r}
 24 \overline{) 5621} \\
 \underline{- 4800} \\
 821 \\
 \underline{- 720} \\
 101 \\
 \underline{- 96} \\
 \text{rest } 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 234 \text{ rest } 5 \\
 100 \times 24 = 2400 \\
 200 \rightarrow 200 \times 24 = 4800 \\
 300 \times 24 = 7200 \\
 30 \xrightarrow{\hspace{2cm}} 10 \times 24 = 240 \\
 \hspace{1.5cm} 20 \times 24 = 480 \\
 \hspace{1.5cm} 30 \times 24 = 720 \\
 4 \rightarrow 1 \times 24 = 24 \\
 \hspace{1.5cm} 2 \times 24 = 48 \\
 \hspace{1.5cm} 4 \times 24 = 96
 \end{array}$$

Het staartdelen volgens het bekende model $24 \overline{) 5641} \dots$ is problematisch omdat er van links naar rechts moet worden gedacht. Bij al het andere cijferwerk begonnen we aan de kant van de kleinste positie, bij de eenheden. Nu moeten we met delen ineens aan de andere kant beginnen! Wie kan vertellen waarom eigenlijk? Is het trouwens echt nodig?

Heel nuttig is ook het feit dat bij de hier gekozen notatie het achterliggende verhaal zichtbaar gemaakt kan worden. Stel dat 5621 staat voor negerzoenen, die in bussen van 24 worden verpakt:

$$\begin{array}{r}
 200 \text{ bussen} \\
 30 \text{ bussen} \\
 4 \text{ bussen} \\
 \hline
 234 \text{ bussen}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5621 : 24 = 234 \text{ bussen} \\
 \underline{- 4800} \\
 821 \\
 \underline{- 720} \\
 101 \\
 \underline{- 96} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{en je hebt er 5 over!} \\
 (\text{mmm!!})
 \end{array}$$

